31. ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ

31.1. Составление математических моделей двойственных задач

Любой задаче линейного программирования, называемой *исходной* или *прямой*, можно поставить в соответствие другую задачу, которая называется *двойственной* или *сопряженной*. Обе эти задачи образуют пару двойственных (или сопряженных) задач. Каждая из задач является двойственной к другой задаче рассматриваемой пары.

В теории двойственности используются четыре пары двойственных задач (приведем их в матричной форме записи):

Исходная задача ***Двойственная задача***

Симметричные пары

1. $Z(X) = CX \to \max, \quad AX \leqslant A_0, \quad X \geqslant \theta;$ $\qquad F(Y) = YA_0 \to \min, \quad YA \geqslant C, \quad Y \geqslant \theta.$ (31.1)

2. $Z(X) = CX \to \min, \quad AX \geqslant A_0, \quad X \geqslant \theta;$ $\qquad F(Y) = YA_0 \to \max, \quad YA \leqslant C, \quad Y \geqslant \theta.$ (31.2)

Несимметричные пары

3. $Z(X) = CX \to \max, \quad AX = A_0, \quad X \geqslant \theta;$ $\qquad F(Y) = YA_0 \to \min, \quad YA \geqslant C.$ (31.3)

4. $Z(X) = CX \to \min, \quad AX = A_0, \quad X \geqslant \theta;$ $\qquad F(Y) = YA_0 \to \max, \quad YA \leqslant C.$ (31.4)

Здесь $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Правила составления двойственных задач:

1. Во всех ограничениях исходной задачи свободные члены должны находиться в правой части, а члены с неизвестными — в левой.

2. Ограничения-неравенства исходной задачи должны быть записаны так, чтобы знаки неравенств у них были направлены в одну сторону.

3. Если знаки неравенств в ограничениях исходной задачи «$\leqslant$», то целевая функция $Z(X) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ должна максимизироваться, а если «$\geqslant$», то минимизироваться.

4. Каждому ограничению исходной задачи соответствует неизвестное в двойственной задаче; при этом неизвестное, отвечающее ограничению-неравенству, должно удовлетворять условию неотрицательности, а неизвестное, отвечающее ограничению-равенству, может быть любого знака.

5. Целевая функция двойственной задачи имеет вид

$$F(Y) = c_0 + b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m,$$

где c_0 — свободный член целевой функции $Z(X)$ исходной задачи, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — свободные члены в ограничениях исходной задачи, при этом b_i — свободный член именно того ограничения исходной задачи, которому соответствует неизвестная y_i, а $y_1, y_2, \ldots, y_m$ — неизвестные в двойственной задаче.

6. Целевая функция $F(Y)$ двойственной задачи должна оптимизироваться противоположным по сравнению с $Z(X)$ образом, т.е. если $Z(X) \to \max$, то $F(Y) \to \min$, и если $Z(X) \to \min$, то $F(Y) \to \max$.

7. Каждому неизвестному x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ исходной задачи соответствует ограничение в двойственной задаче. Совокупность этих n ограничений (вместе с условиями неотрицательности неизвестных y_i, соответствующих ограничениям-неравенствам исходной задачи) образует систему ограничений двойственной задачи. Все ограничения двойственной задачи имеют вид неравенств, свободные члены которых находятся в правых частях, а члены с неизвестными $y_1, y_2, \ldots, y_m$ — в левых. Все знаки неравенств имеют вид «$\geqslant$», если $F(Y) \to \min$, и «$\leqslant$», если $F(Y) \to \max$.

Коэффициенты, с которыми неизвестные $y_1, y_2, \ldots, y_m$ входят в ограничение, соответствующее неизвестному x_j, совпадают с коэффициентами при этом неизвестном x_j в ограничениях исходной задачи, а именно: коэффициент при y_i совпадает с тем коэффициентом при x_j, с которым x_j входит в ограничение исходной задачи, соответствующее неизвестному y_i.

31.1. Составить задачу, двойственную к данной

$$Z(X) = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geqslant 8, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Р е ш е н и е. Умножим первое ограничение-неравенство на −1. Задача примет вид исходной задачи симметричной пары двойственных задач (31.2):

$$Z(X) = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 \geqslant -5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geqslant 8, \end{cases} \begin{array}{|l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Умножим правые части ограничений на соответствующие переменные двойственной задачи и сложим их, получим целевую функцию

$$F(Y) = -5y_1 + 4y_2 + 8y_3 \to \max.$$

Функция $F(Y)$ максимизируется, так как целевая функция исходной задачи минимизируется.

Умножим коэффициенты при x_1 в системе ограничений на соответствующие переменные двойственной задачи и сложим их, получим $-2y_1 + 1 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3$. Данная сумма меньше или равна коэффициенту при x_1 в целевой функции $-2y_1 + y_2 + y_3 \leqslant 5$. Неравенство имеет вид «$\leqslant$», потому что целевая функция двойственной задачи максимизируется. Аналогично составляются еще два ограничения двойственной задачи (соответствуют переменным x_2, x_3):

$$-1 \cdot y_1 + 2y_2 - 1 \cdot y_3 \leqslant 2,$$
$$1 \cdot y_1 - 1 \cdot y_2 + 2y_3 \leqslant 3.$$

Все переменные двойственной задачи удовлетворяют условию неотрицательности, потому что все ограничения исходной задачи — неравенства.

Окончательно двойственная задача имеет вид

$$F(Y) = -5y_1 + 4y_2 + 8y_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 \leqslant 5, \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 \leqslant 2, \\ y_1 - y_2 + 2y_3 \leqslant 3, \end{cases}$$

$$y_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

31.2. Составить задачу, двойственную к данной

$$Z(X) = 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 17, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 11, \end{cases} \begin{array}{|l} y_1 \\ y_2 \end{array}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Р е ш е н и е. Данная задача имеет вид исходной задачи второй несимметричной пары двойственных задач (31.4). Записываем двойственную задачу:

$$F(Y) = 17y_1 + 11y_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 7y_1 + 5y_2 \leqslant 2, \\ 5y_1 + 3y_2 \leqslant -2, \\ 3y_1 + y_2 \leqslant -4, \\ 2y_1 + 2y_2 \leqslant 6. \end{cases}$$

Переменные y_1, y_2 не должны удовлетворять условию неотрицательности, так как они соответствуют ограничениям-равенствам исходной задачи.

31.3. Составить задачу, двойственную к данной

$$Z(X) = 3 + 2x_1 + x_2 + 6x_3 \to \min,$$

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leqslant 7, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \geqslant 6, \end{array}\right| \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Р е ш е н и е. Используем общие правила составления двойственных задач. Умножим второе ограничение-неравенство на -1, так как в задаче на минимум неравенства должны иметь вид «$\geqslant$» (см. правило 3). Исходная задача примет вид

$$Z(X) = 3 + 2x_1 + x_2 + 6x_3 \to \min,$$

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ -2x_1 - 4x_2 - x_3 \geqslant -7, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \geqslant 6, \end{array}\right| \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Составляем двойственную задачу

$$F(Y) = 3 + y_1 - 7y_2 + 6y_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 - y_3 \leqslant 2, \\ -3y_1 - 4y_2 + y_3 \leqslant 1, \\ 2y_1 - y_2 + 3y_3 \leqslant 6, \end{cases}$$

$$y_2 \geqslant 0, \quad y_3 \geqslant 0.$$

Переменная y_1, соответствующая ограничению-равенству, может быть любого знака (см. правило 4).

31.2. Первая теорема двойственности

Теоремы двойственности позволяют установить взаимосвязь между оптимальными решениями пары двойственных задач. Решив одну из пары двойственных задач, можно или найти оптимальное решение другой задачи, не решая ее, или установить его отсутствие. Возможны следующие случаи:

- обе задачи из пары двойственных имеют оптимальные решения;
- одна из задач не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, а другая не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

Теорема. *Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то и двойственная к ней имеет оптимальное решение; причем значения целевых функций задач на своих оптимальных решениях совпадают.*

Если одна из пары двойственных задач не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, то другая не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

31.10. Для данной задачи составить двойственную, решить ее симплексным методом и, используя первую теорему двойственности, найти решение исходной задачи:

$$Z(X) = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 6, & y_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 \geqslant 5, & y_2 \\ x_2 + 2x_3 \geqslant 2, & y_3 \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Решение. Используя вторую симметричную пару двойственных задач (31.2), составляем задачу, двойственную к исходной:

$$F(Y) = 6y_1 + 5y_2 + 2y_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \leqslant 2, & y_4 \\ y_1 + y_2 + y_3 \leqslant 4, & y_5 \\ 2y_1 - y_2 + 2y_3 \leqslant 6, & y_6 \end{cases} \quad \text{Д}$$

$$y_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Вводя неотрицательные дополнительные переменные y_4, y_5, y_6, приводим задачу к каноническому виду:

$$F(Y) = 6y_1 + 5y_2 + 2y_3 + 0y_4 + 0y_5 + 0y_6 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_4 = 2, \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_5 = 4, \\ 2y_1 - y_2 + 2y_3 + y_6 = 6, \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Находим начальное опорное решение $Y_1 = (0, 0, 0, 2, 4, 6)$ с базисом из единичных векторов $Б_1 = (A_4, A_5, A_6)$. Решение задачи симплексным методом приведено в табл. 31.1.

Таблица 31.1

	$Б$	$C_б$	A_0	A_1 (6)	A_2 (↓5)	A_3 (↓2)	A_4 (0)	A_5 (0)	A_6 (0)	θ_1	θ_2	θ_3
←	A_4	0	2	2	$\boxed{1}$	0	1	0	0	1	2	—
	A_5	0	4	1	1	1	0	1	0	4	4	4
	A_6	0	6	2	−1	2	0	0	1	3	—	3
	Δ_j		0	−6	−5	−2	0	0	0	θ_4		
	A_2	5	2	2	1	0	1	0	0	2		
←	A_5	0	2	−1	0	$\boxed{1}$	−1	1	0	—		
	A_6	0	8	4	0	2	1	0	1	$^4/_3$		
	Δ_j		10	4	0	−2	5	0	0			
	A_2	5	2	2	1	0	1	0	0	$\max F(Y) = 14$,		
	A_3	2	2	−1	0	1	−1	1	0	$Y^* = (0, 2, 2)$,		
	A_6	0	4	6	0	0	3	−2	1	$Б^* = (A_2, A_3, A_6)$		
	Δ_j		14	2	0	0	3	2	0			

Оптимальное решение двойственной задачи $Y^* = (0, 2, 2, 0, 0, 4)$, его базис $Б^* = (A_2, A_3, A_6)$, значение целевой функции $\max F(Y) = F(Y^*) = 14$.

Оптимальное решение исходной задачи, двойственной к решенной, можно найти по формуле

$$X^* = C^* D^{-1}. \tag{31.5}$$

Матрица D состоит из координат векторов A_2, A_3, A_6, входящих в базис оптимального решения двойственной задачи:

$$D = (A_2, A_3, A_6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица D^{-1} находится в последней симплексной таблице. Ее столбцы располагаются под столбцами единичной матрицы, т.е. под единичными векторами A_4, A_5, A_6, образующими базис начального опорного решения:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Координатами вектора C^* являются коэффициенты целевой функции при базисных неизвестных оптимального решения y_2, y_3, y_6. Данные коэффициенты записываются в том же порядке, в каком векторы условий входят в базис оптимального решения, т.е. $C^* = (5, 2, 0)$.

Вычисляем $X^* = C^*D^{-1} = (5, 2, 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (3, 2, 0)$.

Оптимальное решение исходной задачи можно найти проще, по формуле

$$x_i^* = \Delta_i^* + c_i^*, \quad i = 1, 2, 3. \qquad (31.6)$$

Для этого необходимо к оценкам разложений по базису оптимального решения векторов A_4, A_5, A_6, входящих в базис начального опорного решения, т.е. к оценкам этих векторов в последней симплексной таблице, прибавить соответствующие коэффициенты целевой функции (они расположены над верхней строкой таблицы над соответствующими оценками)

$$x_1^* = 3 + 0 = 3, \quad x_2^* = 2 + 0 = 2, \quad x_3^* = 0 + 0 = 0.$$

Ответ: $\min Z(X) = 14$ при $X^* = (3, 2, 0)$.

31.3. Вторая теорема двойственности

Пусть имеется симметричная пара двойственных задач

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \qquad F(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad (31.7)$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \qquad y_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Теорема. *Для того чтобы допустимые решения $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ являлись оптимальными решениями пары двойственных задач, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие равенства:*

$$x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j \right) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \qquad (31.8)$$

$$y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (31.9)$$

Иначе, если при подстановке оптимального решения в систему ограничений i-е ограничение исходной задачи выполняется как строгое неравенство, то i-я координата оптимального решения двойственной задачи равна нулю, и, наоборот, если i-я координата оптимального решения двойственной задачи отлична от нуля, то i-е ограничение исходной задачи удовлетворяется оптимальным решением как равенство.

31.23. Для данной задачи составить двойственную, решить ее графическим методом и, используя вторую теорему двойственности, найти решение исходной задачи:

$$Z(X) = -2x_1 + 4x_2 + 14x_3 + 2x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 30, \end{cases} \begin{array}{|l} y_1 \\ y_2 \end{array}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Р е ш е н и е. Составим двойственную задачу

$$F(Y) = 6y_1 + 30y_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 \leqslant -2, & (1)\\ -y_1 + 2y_2 \leqslant 4, & (2)\\ y_1 + 4y_2 \leqslant 14, & (3)\\ 2y_1 - 5y_2 \leqslant 2. & (4) \end{cases}$$

Решим эту задачу графическим методом. На рис. 31.1 изображены область допустимых решений задачи, нормаль $\bar{n} = (6, 30)$ линий уровня, линии уровня и оптимальное решение задачи $Y^* = (2, 3)$.

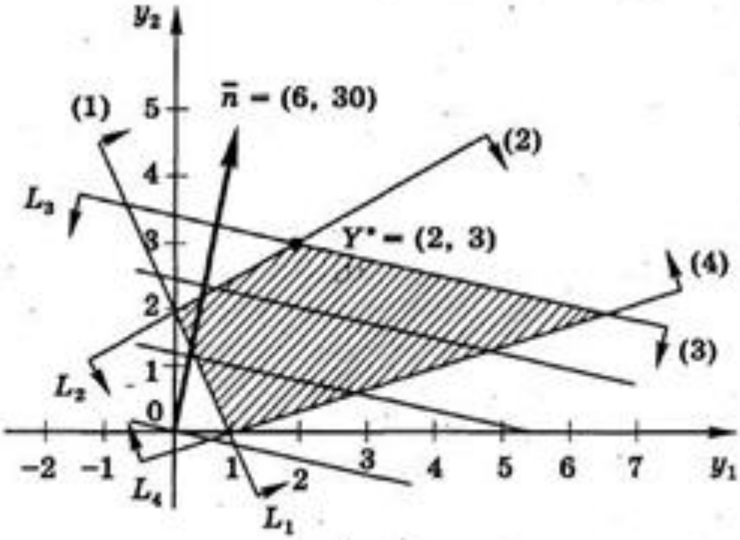

Рис. 31.1

$$Y^* = L_2 \cap L_3,$$

$$+\begin{cases} -y_1 + 2y_2 = 4, & (L_2)\\ y_1 + 4y_2 = 14 & (L_3) \end{cases}$$
$$6y_2 = 18;$$

$$y_2^* = 3, \ y_1^* = 2;$$
$$Y^* = (2, 3);$$

$$F(Y^*) = 6 \cdot 2 + 30 \cdot 3 = 102.$$

Подставим оптимальное решение $Y^* = (2, 3)$ в систему ограничений. Получим, что ограничения (1) и (4) выполняются как строгие неравенства:

$$\begin{cases} -2 \cdot 2 - 3 < -2 \Rightarrow x_1^* = 0,\\ -2 + 2 \cdot 3 = 4,\\ 2 + 4 \cdot 3 = 14,\\ 2 \cdot 2 - 5 \cdot 3 < 2 \Rightarrow x_4^* = 0. \end{cases}$$

Согласно второй теореме двойственности соответствующие координаты оптимального решения двойственной задачи, т.е. исходной задачи, равны нулю: $x_1^* = x_4^* = 0$. Учитывая это, из системы ограничений исходной задачи получим

$$+\begin{cases} -x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_2 + 4x_3 = 30 \end{cases} \Bigg| \times 2$$
$$6x_3 = 42;$$

$$x_3^* = 7, \quad x_2^* = 1; \quad X^* = (0, 1, 7, 0).$$

О т в е т: $\min Z(X) = 102$ при $X^* = (0, 1, 7, 0)$.